



# Kapitel 5

## Randelementmethode

### 1. Einleitung

Bei der Randintegralmethode wird eine partielle Differentialgleichung in 3D in eine Randintegralgleichung (2D Problem) übergeführt. Diese Randintegralgleichung wird dann durch ein 2 dimensionales Oberflächengitter diskretisiert.

#### Vorteile gegenüber der FEM

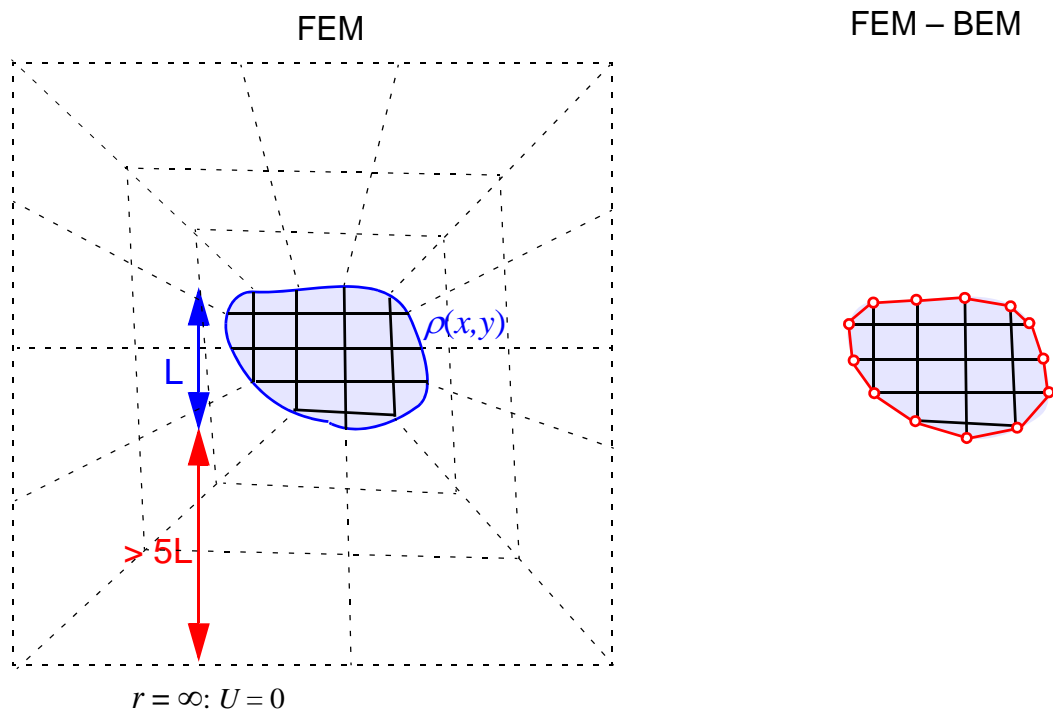
- Reduktion der Problemgröße (3D  $\Rightarrow$  2D), weniger Unbekannte
- nur Oberflächengitter
- Gittergenerierung für das Volumen entfällt
- gut konditionierte Gleichungssysteme  $\Rightarrow$  wenige Iterationen bei der iterativen Lösung

#### Nachteil gegenüber der FEM

- voll besetzte Matrizen

Die Matrizen der FEM sind dünn besetzt jedoch mit zunehmender Systemgröße immer schlechter konditioniert.

Im besonderen läßt sich die BEM Methode verwenden um Randbedingungen im Unendlichen (z.B. Potential ist Null im Unendlichen auf einen Rand im endlichen zu transformieren. Eine sehr elegante Methode bei der zuerst die FEM Methode verwendet wird und danach mit den Lösungen der FEM Methode die Randbedingung im Unendlichen berücksichtigt wird, wurde von Fredkin und Koehler [ 1] vorgestellt .



## 2. Beispiel: Poisson (Laplace)gleichung

Wir gehen von der Poissongleichung

$$\Delta u = \rho(\mathbf{r}), \quad (5.1)$$

wobei entweder Neumann oder Dirichletsche Randbedingungen vorgegeben sind. Zuerst multiplizieren wir diese Gleichung mit der Gewichtsfunktion  $\varphi(\mathbf{r})$ .

$$\int \Delta u(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})dV = \int \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})dV. \quad (5.2)$$

Für die wahre Lösung  $u(x)$  sind die Integranden dieser Ausdrücke unabhängig von der Gewichtsfunktion stets gleich. Setzen wir jedoch anstelle der wahren Lösung ein, so ergibt sich ein Residuum, daß im Rahmen der Methode der Gewichtsfunktionen gewichtet über den gesamten Raum integriert, gerade im Mittel verschwinden soll.

Durch Anwenden der zweiten Greenschen Formel erhalten wir,

$$\int u(\mathbf{r}) \Delta \varphi(\mathbf{r}) dV = \int \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dV + \int \left( \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} \varphi(\mathbf{r}) \right) dA \quad (5.3)$$

Diese Gleichung gilt nun für jede beliebige Klasse von Gewichtsfunktionen. Der Trick der BEM besteht in der Auswahl der Gewichtsfunktionen. Es werden Fundamentallösungen verwendet, für die das Gebietsintegral auf der linken Seite der Gleichung geschlossen ausgewertet werden kann.

Die Grundlösung des Laplace-Operators ist

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad \text{für } d = 2 \quad (5.4)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{für } d = 3 \quad (5.5)$$

und diese lösen die Gleichung

$$\Delta G - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$$

Im folgenden betrachten wir den Fall für  $d = 3$ . Wir setzen für die Gewichtsfunktion

$$\varphi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (5.6)$$

wobei später die  $\mathbf{r}'$  die Koordinaten der Knotenpunkte des Oberflächengitters sein sollen. Somit ergeben sich  $N$  Gewichtsfunktionen, wenn  $N$  die Anzahl der Oberflächenknoten ist.

Da das Integral über die Greensfunktion die Deltafunktion ist, erhalten wir (die wohl bekannte Formel),

$$u(\mathbf{r}') = \int \rho(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV + \int \left( G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) dA$$

Nun werten wir  $u(\mathbf{r}')$  am Rand des Gebietes aus. Zu beachten ist, daß nun die Integrale über die Greensfunktion eine Singularität besitzen.

**1. Term :** Der Term

$$\int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{r}) dA \quad (5.7)$$

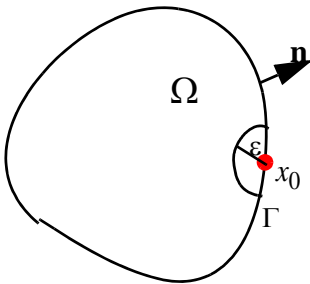
zeigt im 3-d Fall eine  $1/r$  Singularität im Quellpunkt und kann somit im klassischen Sinn als uneigentliches Integral definiert werden und kann somit leicht berechnet werden.

**2. Term :** Die Singularität des zweiten Terms

$$\int u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dA \quad (5.8)$$

ist von stärkerer Natur ( $1/r^2$ ) und muß genauer betrachtet werden.

Das Integral wird in zwei Terme aufgespalten. Der erste Term beschreibt das eigentliche Integral im Gebiet fern von der Singularität, der zweite Term integriert über die Singularität.



Für den Grenzübergang nehmen wir eine Halbkugel an, deren Mittelpunkt genau auf der Singularität liegt und deren Radius mit  $\epsilon$  abnimmt.

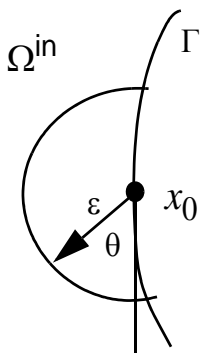
Der Grenzübergang  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$  von innen führt auf

$$\int u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{n} dA = \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} 2r^2 \pi u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} u(\mathbf{r}') \quad (5.9)$$

wobei für die Ableitung der Greensfunktion berücksichtigt wurde

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (5.10)$$

und  $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  und die Länge  $r$  hat ist. Weiters haben wir berücksichtigt, daß die Greensfunktion konstant ist wenn über  $dA$  integriert wird. Somit haben wir analytisch über die Singularität integriert. Die numerische Integration über die gesamte Oberfläche, macht keine grösseren Probleme, da in der Nähe der Singularität der Zähler null wird. Dies ist wegen der Tatsache, daß in der Nähe der Singularität der Oberflächennormalvektor senkrecht auf den Vektor  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  steht. In der diskreten Form betrifft das alle Elemente die einen Knotenpunkt auf der Singularität haben. Bei diesen Elementen ist das Produkt  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  mal  $\mathbf{n}$  exakt Null.



Obiges Resultat ist gültig für glatte Ränder. Liegt der Quellpunkt auf einer Ecke, ergibt sich ein Ausdruck der den Raumwinkel  $D$  beinhaltet

$$\int u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \cdot \mathbf{n} dA = \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} D r^2 = -\frac{D}{4\pi} (u(\mathbf{r}')) \quad (5.11)$$

Somit erhalten wir nach Durchführen des Grenzüberganges

$$u(\mathbf{r}') \left( \frac{D}{4\pi} + 1 \right) = \int \rho(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV + \int \left( G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) dA \quad (5.12)$$

Das Volumsintegral in der obigen Gleichung macht Probleme, da es im Allgemeinen eine Integration über das Volumen verlangt und in diesem Fall die Vorteile der BEM zunichte macht. Nur in dem Spezialfall, wo es sich in ein Oberflächenintegral umformen lässt kann es ohne weiteres berücksichtigt werden. Befinden sich die Quellen ausschließlich in der Nähe des Randes können auch spezielle Methoden verwendet werden (Dual reciprocity...) um die BEM weiterhin attraktiv zu machen.

Somit nehmen wir im folgendem an

$$\rho(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.13)$$

und

$$u(\mathbf{r}') \left( \frac{D}{4\pi} + 1 \right) = \int \left( G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) dA \quad (5.14)$$

Wird diese Gleichung am Rand diskretisiert, und die bekannten Randwerte

$$w_i = \frac{\partial}{\partial n} u_i(\mathbf{r}),$$

beziehungsweise auf anderen Teilen des Randes  $u_i(\mathbf{r})$  eingesetzt ergeben sich die folgenden  $N$ -Gleichungen.

$$H u_i = G w_i, \quad (5.15)$$

wobei  $H$  und  $G$  Matrizen von der Größe  $N \times N$  sind und  $N$  die Anzahl der Randknoten beschreiben.

Somit kann auf **jedem Punkt** des Randes  $u_i(\mathbf{r})$  und

$$w_i = \frac{\partial}{\partial n} u_i(\mathbf{r})$$

**berechnet werden.** Genauer ist  $u_i(\mathbf{r})$  bekannt läßt sich  $w_i = \frac{\partial}{\partial n} u_i(\mathbf{r})$  berechnen und umgekehrt.

Danach kann durch Gleichung 5.14 an jedem beliebigen Punkt das Potential bestimmt werden.

## 6. Beispiel: Laplacegleichung mit Dirichletbedingung

Etwas einfacher gestaltet sich der Spezialfall wenn im gesamten Raum Dirichletsche Randbedingungen vorgegeben sind. Dabei wird das Aussenraumproblem wie es in Feldberechnungen häufig vorkommt gelöst indem auf Wissen über bekannte Potentiale zurückgegriffen wird. Für die Lösung der Laplacegleichung

$$\Delta u = 0 \tag{5.1}$$

mit Dirichletschen Randbedingungen setzen wir die bekannt Lösung für das Potential einer Doppelschicht mit der Dipolbelegung  $D$  an.

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \underbrace{D(\mathbf{y})}_{\substack{\uparrow \\ \text{Dipolbelegung}}} (\nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_{\mathbf{y}}$$

Dipolbelegung

Diese erfüllt die Laplacegleichung auf  $\mathfrak{R}^d \setminus \Gamma$  und springt beim Durchgang durch den Rand

$$u^{\text{out}} - u^{\text{in}} = D \text{ auf } \Gamma$$

Der Grenzübergang  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \Gamma$  von innen führt auf

$$u^{\text{in}}(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{2}D(\mathbf{x}_0) + \underbrace{\int_{\Gamma} D(\mathbf{y})(\nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_{\mathbf{y}}}$$

wobei der singulärer Anteil wieder über einen Halbkreis um  $x_0$  integriert worden ist. Setzen wir für die Randknoten die Dirichletsche Bedingung

$u^{\text{in}}(\mathbf{x}) = f$  ein, erhalten wir

$$f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}D(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} D(\mathbf{y})(\nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n})d\Gamma_{\mathbf{y}}.$$

Die obige Gleichung kann für die Bestimmung der Dipolbelegung an den Randknoten herangezogen werden.

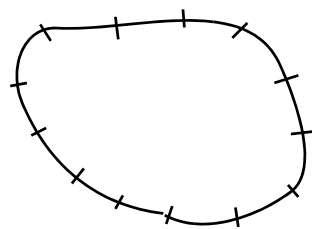
Ist die Dipolbelegung bekannt kann im Inneren das Potential einfach aus

$$\underbrace{u(\mathbf{x})}_{\mathbf{u}} = \int_{\Gamma} \underbrace{(\nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{A}} \underbrace{D(\mathbf{y})}_{\mathbf{d}} d\Gamma_{\mathbf{y}}$$

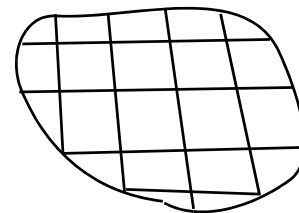
berechnet werden.

## 6. Diskretisierung der Randintegralgleichung

Für die Diskrete Formulierung teilen wir den Rand in Elemente  $\Gamma_e$



BEM



FEM

und ersetzen die Integrale durch Summen über Teilintegrale

$$f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}D(\mathbf{x}) = \sum_e \int_{\Gamma_e} \underbrace{(\nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{A}} D(\mathbf{y})d\Gamma_{\mathbf{y}}. \quad (5.1)$$

wobei wir im folgenden schreiben,

$$k(x, y) = \nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}. \quad (5.2)$$

Dabei wird die Dipolbelegung  $D(y)$  auf jedem Element auf dem Randgitter lokal in Basisfunktionen entwickelt

$$D(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^N d_j \varphi_j(\mathbf{y}), \quad (5.3)$$

wobei  $d_j$  die Dipolbelegung am Knoten  $j$  mit den Koordinaten  $\mathbf{y}_j$  ist. Einsetzen in die Teilintegrale ergibt

$$f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}D(\mathbf{x}) = \sum_e \int_{\Gamma_e} \left( \sum_{j=1}^N k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d_j \varphi_j(\mathbf{y}) \right) d\Gamma_y \quad (5.4)$$

die Gleichung gilt für jeden Punkt  $P$  des Randes mit den Koordinaten  $\mathbf{x}$ .

Setzt man  $P$  nacheinander auf jeden Knoten  $i$  des Gitters folgt eine Gleichung für jeden Gitterpunkt  $\mathbf{x}^i$

$$f(\mathbf{x}^i) + \frac{1}{2}D(\mathbf{x}^i) = \underbrace{\left\{ \sum_e \int_{\Gamma_e} \left( \sum_{j=1}^N k(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}) \varphi_j(\mathbf{y}) \right) d\Gamma_y \right\}}_{d_j} \quad (5.5)$$

für  $i = 1, \dots, N$ .

In Matrixschreibweise wird die Matrix  $\mathbf{K}$  der diskretisierte Integraloperator

$$K_{ij} = \sum_e \int_{\Gamma_e} \left( \sum_{j=1}^N k(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}) \varphi_j(\mathbf{y}) \right) d\Gamma_y$$

Die Dipolbelegung an den Knotenpunkten folgt aus dem Gleichungssystem

$$\left( \mathbf{K} - \frac{1}{2}\mathbf{I} \right) \mathbf{d} = \mathbf{f}$$



## 5. 6. Berechnung des Potentials an beliebigen Punkten

Ist die Dipolbelegung  $D$  am Rand bekannt setzt man für  $\mathbf{x}$  die Koordinaten der Punkte ein, an denen  $u(\mathbf{x}^i)$  benötigt wird

$$u(\mathbf{x}^i) = \underbrace{\left\{ \sum_e \int_{\Gamma_e} \left( \sum_{j=1}^N k(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}) \varphi_j(\mathbf{y}) \right) d\Gamma_y \right\}}_{A_{ij}} d_j, \quad i = 1, \dots, M$$

Die Werte von  $u$  erhält man durch Matrix-Vektor Multiplikation

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{d},$$

$\mathbf{A}$  ist eine  $M \times N$  Matrix, wobei  $M$  die Anzahl der Punkte, an denen das Potential berechnet wird ist und  $N$  Anzahl der Randknoten beschreibt.

## 6. Kopplung FEM / BEM

Im folgenden untersuchen wir den Fall, daß der Quellterm in der Poissongleichung nicht verschwindet. Hier kann eine Kombination der finiten Elementmethode und der Randelementmethode zu einer effizienten Methode entwickelt werden.

Als Beispiel berechnen wir magnetostatische Feld eines Körpers mit gegebener Magnetisierung. Es ist zweckmäßig von den Maxwellgleichungen der Magnetostatik ausgegangen werden.

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (5.1)$$

Durch das Einführen des Potentials  $u$  können die Maxwellgleichungen geschrieben werden als,

$$\Delta u = \frac{\nabla \mathbf{J}}{\mu_0} \quad \text{und} \quad \mathbf{H} = -\nabla u, \quad (5.2)$$

mit der Randbedingung, daß das Potential im Unendlichen verschwindet.

$$u = 0, \quad \text{für} \quad r \rightarrow \infty \quad (5.3)$$

Die zweite Gleichung in (5.2) gewährleistet die, durch die zweite Gleichung in (5.1) geforderte, Wirbelfreiheit des magnetischen Feldes. Um die erste Gleichung in (5.2) zu erhalten wurde  $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}+\mathbf{J}$  in die erste Gleichung in (5.1) eingesetzt.

Aus (5.1) folgen die Übergangsbedingungen an der Oberfläche des Magneten,

$$(\mathbf{B}_{in} - \mathbf{B}_{out})\mathbf{n} = ((-\mu_0\nabla u_{in} + \mathbf{J}_{in}) - (-\mu_0\nabla u_{out} + \mathbf{J}_{out}))\mathbf{n} = 0 \quad (5.4)$$

$$(\mathbf{H}_{in} - \mathbf{H}_{out}) \times \mathbf{n} = 0, \quad (5.5)$$

die an der Oberfläche des Magneten erfüllt sein müssen. Ist das Potential  $u$  stetig,

$$u_{in} - u_{out} = 0, \quad (5.6)$$

gilt stets Glg. 5.5. Somit haben wir Sprungbedingungen die an der Oberfläche des Magneten für das Potential und der Ableitung des Potentials erfüllt sein müssen.

Wird nun die Poissongleichung (5.2) mit den Randbedingung (5.3) gelöst ergibt sich das Problem, daß ein finites Elementmesh bis ins unendliche oder zumindest weit außerhalb des magnetischen Körpers eingeführt werden muß, um die Randbedingung zu berücksichtigen. (Hinweis: Beim Galerkin Ansatz läßt sich zeigen, daß die Übergangsbedingungen (5.4) und (5.6) automatisch erfüllt sind)

Die Randbedingungen im Unendlichen können nun elegant durch die Kopplung der Finiteelementmethode und der Randelementmethode berücksichtigt werden. Diese Hybride Methode verknüpft die Vorteile der Randelementmethode (Boundary Element Methode) und der finiten Element Methode. Die Randbedingung im Unendlichen wird mit der Randelementmethode berücksichtigt, wobei keine Elemente im Außenraum benötigt werden. Die Berücksichtigung der Volumsdivergenzen des Streufeldes erfolgt effizient mit der finiten Element Methode, die zu dünn besetzten Matrizen führt.

Die Grundidee ist das Potential  $u$  in  $u=u_1+u_2$  aufzuspalten [1]. Für  $u_1$  wird eine Neumannsche Randwertaufgabe angesetzt.

$$u_1^{out} = 0 \quad (5.7)$$

$$\Delta u_1^{in} = \frac{\nabla \mathbf{J}_s}{\mu_0} \quad (5.8)$$

Mit den Übergangsbedingungen, wobei  $u_1^{out} = 0$  berücksichtigt wird.

$$\frac{\partial u_1^{out}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u_1^{in}}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial u_1^{in}}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\mathbf{J}_s}{\mu_0} \mathbf{n} \quad (5.9)$$

$$u_1^{out} - u_1^{in} = -u_1^{in} \quad (5.10)$$

Glg. 5.8 kann mit der Randbedingung (5.9) mit Hilfe der finiten Element Methode gelöst werden. Damit das gesamte Potential  $u$ , das durch die Superposition von  $u_1$  und  $u_2$  erhalten wird, die Poissongleichung (5.2), die Sprungbedingung  $\mathbf{Mn}$  für die Normalableitung des Potential (5.4) und die Stetigkeitsbedingung für das Potential (5.6) erfüllt, muß für  $u_2$  gelten:

$$\Delta u_2^{out} = 0 \quad (5.11)$$

$$\Delta u_2^{in} = 0 \quad (5.12)$$

mit den Übergangsbedingungen,

$$\frac{\partial u_2^{out}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u_2^{in}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (5.13)$$

$$u_2^{out} - u_2^{in} = u_1^{in} \quad (5.14)$$

Die Gleichungen für  $u_2$  beschreiben das Potential einer Doppelschicht mit der bekannten Dipolbelegung  $u_1^{in}$ . In integraler Form kann dafür geschrieben werden,

$$u_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{u_1^{in}(\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} \mathbf{n} d\Gamma_y. \quad (5.15)$$

Prinzipiell könnte mit Glg. 5.15  $u_2$  im gesamten Raum bestimmt werden. Um den Speicheraufwand, der in diesem Fall von der Ordnung  $N^{5/3}$  wäre, zu reduzieren, wird  $u_2$  nur auf der Dipolschicht also auf dem Rand des Magneten berechnet. Die daraus erhaltenen Werte dienen als Dirichletsche Randbedingungen für die Laplacegleichung (5.12), die mit der finiten Element Methode gelöst werden kann. Der Speicheraufwand kann somit auf

$N^{4/3}$  reduziert werden. Wird  $u_2$  am Rand  $\Gamma_y$  berechnet, wird das Integral in Glg. 5.15 singular. Der Grenzübergang für  $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma_y$  von innen führt auf

$$u_2(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{u_1^{in}(\mathbf{y})(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y})}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|^3} \mathbf{n} d\Gamma_y + \left( \frac{\Omega(\mathbf{x}_0)}{4\pi} - 1 \right) u_1^{in}(\mathbf{x}_0), \quad (5.16)$$

wobei  $\Omega(\mathbf{x}_0)$  den Raumwinkel bezeichnet, der die Randfläche im Punkt  $x_0$  umschließt. Für glatte Flächen gilt

$$\Omega(\mathbf{x}_0) = 2\pi. \quad (5.17)$$

Wird die Dipolbelegung am Rand nach den lokalen Basisfunktionen  $\varphi_k^i(\mathbf{y})$  entwickelt

$$u_1^{in}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N u_1^i \varphi^i(\mathbf{y}), \quad (5.18)$$

und in Glg. 5.16 eingesetzt, ergibt sich,

$$u_2(\mathbf{x}_0^j) = \left( \frac{\Omega(\mathbf{x}_0^j)}{4\pi} - 1 \right) u_1^j + \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{e=1}^{ele} \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta_e} \frac{\varphi^i(\mathbf{y})(\mathbf{x}_0^j - \mathbf{y})}{(\mathbf{x}_0^j - \mathbf{y})^3} \mathbf{n} d\Gamma_y \right] u_1^i \quad (5.19)$$

wobei  $u_2$  an den  $N$  Punkten auf dem Oberflächengitter ausgewertet wurde. Das Integral wurde in eine Summe von Integralen über die einzelnen Oberflächenelemente aufgespalten.  $ele$  ist die Anzahl der finiten Elemente und  $N$  die Anzahl der Knotenpunkte. In Glg. 5.19 wurde

$$u_1^{in}(\mathbf{x}_0^j) = \sum_{i=1}^N u_1^i \varphi^i(\mathbf{x}_0^j) = u_1^j \quad (5.20)$$

verwendet. Glg. 5.19 kann in der Form

$$u_2^j = B_{ij} u_1^i \quad (5.21)$$

geschrieben werden. Die  $N \times N$  Matrix  $B$  ist vollbesetzt, muß jedoch nur einmal berechnet werden, da sie nur von der Geometrie des Körpers und dem finiten Element Gitter abhängt. Außerdem kann die vollbestzte Matrix  $B$  kann durch eine Wavelet Transformation auf eine dünnbesetzte Matrix transformiert werden.

Zusammenfassend, kann gesagt werden, daß bei der Hybriden FE/BE Methode zuerst mit Hilfe der finiten Element Methode  $u_1$  berechnet wird. Durch die bekannten Werte von  $u_1$  an den Randknoten kann mit Hilfe der Randelementmethode  $u_2$  am Rand berechnet werden. Mit Hilfe der so ermittelten Randwerte für  $u_2$  kann  $u_2$  im gesamten Körper durch Lösung der Laplacegleichung. Zuletzt muß nur noch  $u_1$  sa  $u_2$  addiert werden, und nach Bildung des Gradienten folgt das magnetische Feld im inneren des Magneten.

## 5. 22. Vergleich Finite Elemente – Randelemente

| FEM   | BEM  |
|---|--|
| Gitter über das gesamte Gebiet                            | nur Oberflächengitter<br><i>Vorteile bei der Gittergenerierung</i>               |
| Lösung auf dem gesamten Gebiet                            | 1. Schritt: Lösung an den Randknoten<br>2. Schritt: Lösung nur dort wo gewünscht |
| $\nabla u \cdot \mathbf{n}$ am Rand weniger genau als $u$ | $\nabla u \cdot \mathbf{n}$ und $u$ mit gleicher Genauigkeit                     |
| Approximation der Differentialgleichung                   | nur Randbedingungen werden approximiert  |
| dünn besetzte Matrix<br><i>schlecht konditioniert</i>     | voll besetzte Matrix<br><i>gut konditioniert</i>                                 |
| nichtlineare Probleme sind möglich                        | nichtlineare Probleme erfordern spezielle Methoden                               |
| Näherungen für Außenraumprobleme                          | keine Näherungen für Außenraumproblemen<br><i>FEM – BEM Kopplung sinnvoll</i>    |

[1] D. R. Fredkin und T.R. Koehler, IEEE Trans. Magn., vol. 26, pp. 415 - 417, 1990.