

# Kapitel 3

## Finite Element Methode



### 1. Grundlagen der Methode der Finiten Elemente (FEM)

Die erste Methode bei der Grundzüge der FEM zu finden sind, wurde vor mehr als 150 Jahre von Schellbach beschrieben um ein Minimalflächenproblem zu lösen. Minimalflächen kommen in der Natur vor als „Seifenhäute“ die sich einstellen, wenn man eine beliebig geformte Drahtschleife in eine Seifenlauge taucht. Diese Flächen sind die mit der geringsten Oberfläche unter allen möglichen Flächen mit demselben Drahtgestell als Rand (z.B. Zeltdach des Münchner Olympiastadions.)

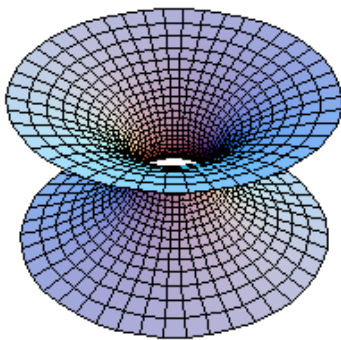


Abbildung 1: Beispiel von Minimalflächen. (links) Kateneoid sind die ältesten bekannten Minimalflächen. (rechts) Olympiastadion von München.

Die Vorgangsweise von Schellbach kann als FEM mit linearen Dreieckselementen auf einem regelmäßigen Gitter interpretiert werden.

Weiters zählen die Arbeiten von Ritz und Galerkin zur Vorgeschichte der FEM. Die FEM ist nämlich ein spezielles Ritz- bzw. Galerkin-Verfahren

## 2. Diskretisierungsmethoden

Im folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben, wie eine partielle Differentialgleichung diskretisiert werden kann.

### Ritz Verfahren:

Die differential Gleichung wird auf ein Minimierungsproblem transformiert. (Ist nicht immer möglich, aber einfache Methode liefert die Theorie der Euler Lagrange Gleichungen). Nun ist ein Funktional  $J(u)$  zu minimieren, wobei  $u$  alle zulässigen Funktionen durchläufen, wie zum Beispiel alle im Intervall  $[0,1]$  stetig differenzierbaren Funktionen  $u(x)$ .

Eine Näherungslösung für das Funktion  $\int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - u(x)\rho dx$  wird beim Ritzschen

Verfahren auf die folgende Weise bestimmt: Man wähle ein System von Funktionen  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1,2,\dots,n$  und setzt den Ausdruck

$$u^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x)$$

in das Funktional ein. Die Ansatzfunktionen sollen

- linear unabhängig sein
- Randbedingungen erfüllen
- glatt und differenzierbar sein

Das Minimum des Funktionals kann somit aus den Gleichungen

$$\frac{\partial J(u^{(n)})}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial J(u^{(n)})}{\partial u_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial J(u^{(n)})}{\partial u_n} = 0$$

ermittelt werden. Die Qualität der Lösung für die Funktion hängt von der Zahl  $n$  ab. Beispiele für Basisfunktionen sind:

$$\varphi_i(x) = (1-x)x^i$$

### Quadratmittelapproximation:

Die Randwertaufgabe  $Lu = f$  mit dem Differentialoperator  $L$  wird umgeformt auf  $Lu - f = 0$ . Wird nun die Näherungslösung für  $u^{(n)}(x)$  eingesetzt ist die Gleichung nicht mehr erfüllt. An jedem Punkt wird ein Fehler, das sogenannte Residuum  $R$  auftreten

$$Lu - f = R.$$

Über den gesamten Bereich soll nun das Residuum minimal sein.

$$\int (Lu^{(n)} - f)^2 dV \rightarrow \mathbf{min}$$

Aus dieser Extremwertaufgabe können wieder die Entwicklungskoeffizienten bestimmt werden.

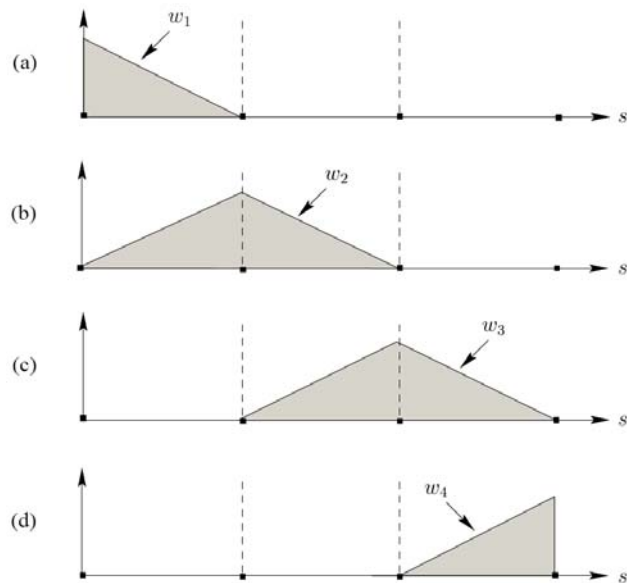
### Kollokationsverfahren:

Das Residuum soll an  $n$ -Punkten verschwinden. Daraus ergeben sich genausoviel Gleichungen wie Unbekannt. Daraus können die Entwicklungskoeffizienten wieder bestimmt werden.

$$(Lu - f)(x_i) = 0, i = 1, \dots, N$$

### Petrov-Galerkin-Verfahren:

Das Residuum wird mit Testfunktionen multipliziert. Es erweist sich als sehr zweckmäßig, wenn jede dieser Testfunktionen nur in kleinen Raumgebiet von Null verschieden ist. Beispiel Hütchen-Funktionen:



$$\int (Lu - f)\psi_i dV = 0, \text{ für } N \text{ Testfunktionen } (\psi_1, \dots, \psi_N)$$

Daraus ergeben sich genausoviel Gleichungen wie Unbekannt. Daraus können die Entwicklungskoeffizienten wieder bestimmt werden.

## 3. Datenapproximation

Bei der numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen wird die exakte Lösung durch eine Näherungslösung approximiert. Es ist daher sinnvoll vorerst verschiedene Methoden zur Approximation von Daten zu vergleichen.

**Approximation eines eindimensionalen Datenfeldes.** Gesucht ist ein Ausdruck  $u(x)$  der ein eindimensionales Feld von Daten, zum Beispiel Meßwerte der Temperatur entlang eines Stabes, approximiert.

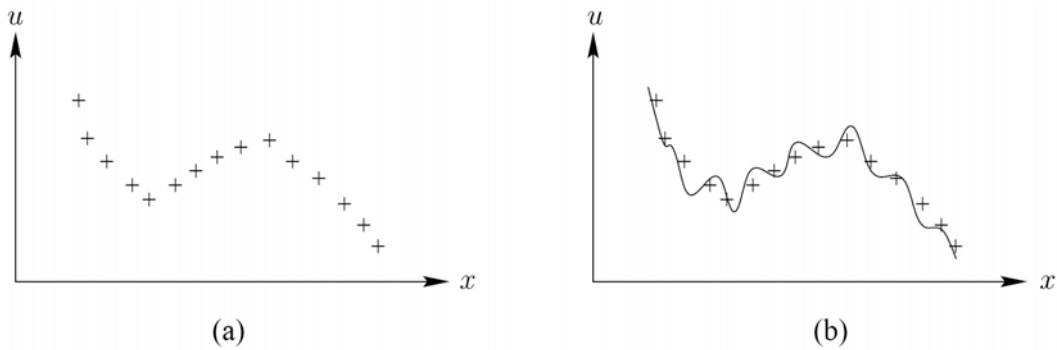


Abbildung 2:(a) Meßwerte der Temperatur entlang eines Stabes. (b) Least-square fit mit einem Polynom. Es kommt zu Oszillationen zwischen den Datenpunkten.

Abbildung 3:

Eine Möglichkeit ist für  $u$  ein Polynom

$$u(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots \quad (2.1)$$

anzusetzen und die Koeffizienten  $a, b, c, \dots$  durch die Methode der kleinsten Fehlerquadrate (least-square fit) zu bestimmen. Dann werden mit zunehmenden Grad des Polynoms die Datenpunkte immer genauer gefittet. Die Verwendung eines Polynoms hat den Vorteil, daß dieses dann leicht differenziert und integriert werden kann. Für zunehmender Genauigkeit der Approximation der Datenpunkte muß der Grad der Polynome erhöht werden. Dann können jedoch zwischen den Datenpunkten Oszillationen auftreten.

Teilt man den Stab in Teilgebiete und setzt für jedes Teilgebiet Polynome niedriger Ordnung an, kann man die Oszillationen verhindern und die Vorteile eines Polynomen Ansatzes erhalten.

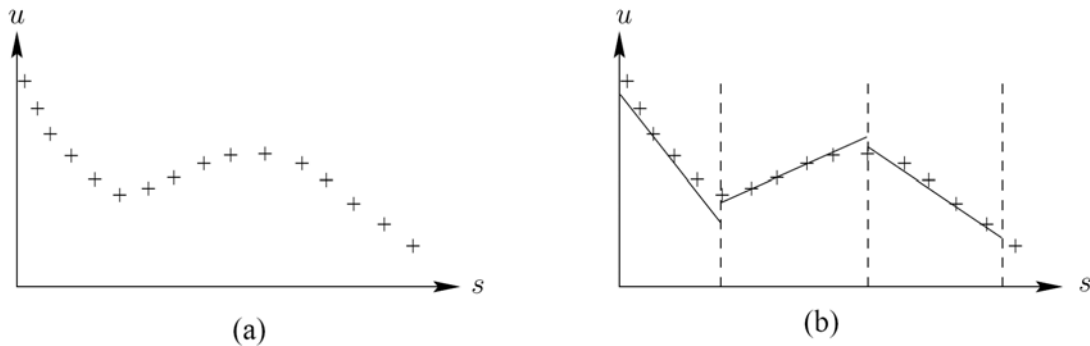


Abbildung 4:(a) Gemessene Temperaturverteilung. (b) Aufteilung des Stabes in drei Elemente. Auf jedem Element wird die Temperatur mit einem linearen Polynom gefittet.

## Das Verfahren von Ritz

Numerische Lösungsverfahren sind eng verknüpft mit der Approximation von Daten. Zur Lösung einer Variationsaufgabe kann man die Lösung  $u$  als Funktion der Ortskoordinaten mit unbestimmten Koeffizienten  $a, b, c, \dots$  ansetzen. Das zu minimierende Funktional, meist ein Integral  $I$  von einer Funktion  $F = F(u)$  über einen bekannten Integrationsbereich  $B$ , hängt dann nur von den unbestimmten Koeffizienten ab:  $I = f(a, b, c, \dots)$ . Notwendig für ein relatives Minimum von  $I$  sind die Bedingungen

$$\frac{\partial I}{\partial a} = 0, \frac{\partial I}{\partial b} = 0, \frac{\partial I}{\partial c} = 0, \dots \quad (2.2)$$

Die Gleichungen (2.2) stellen eine Gleichungssystem für die Unbekannten  $a, b, c, \dots$  dar, das genau so viele Gleichungen wie Unbekannte besitzt und im allgemeinen eindeutig nach ihnen aufgelöst werden kann. Die so eben beschriebene Methode entspricht dem Verfahren von Ritz [22]. Das Verfahren von Ritz gilt als Vorläufer der Methode der finiten Elementen.

### Nachteile des Verfahren von Ritz

- 1 Im allgemeinen ist es schwierig Ortsfunktionen mit unbekanntem Koeffizienten zu finden, die alle Randbedingungen des Problems erfüllen.

**2 Die Koeffizientenmatrix des Systems enthält kaum Nullelemente. Die Lösung des Gleichungssystems wird dadurch rechenzeit- und speicherplatz aufwendig.**

Nun kann – wie in “Datenapproximation” auf Seite 4 gezeigt – der Definitionsbereich in finite Elemente zerlegt werden. Randbedingungen können nun viel flexibler berücksichtigt werden, da jedem Element eigene Ortsfunktionen zugeteilt werden. Das Verfahren führt schließlich auf eine dünn besetzte Matrix mit Bandstruktur.

**3. 1. Form- und Basisfunktionen (1-d)  
(lokale Sichtweise)**

Die stückweisen, linearen Approximation der Temperaturmeßwerte in “Datenapproximation” auf Seite 4 ist an den Rändern der Elemente unstetig. Zur Approximation der Näherungslösung über ein finites Element  $e$  nimmt man an, daß diese linear zwischen den beiden Randwerten  $u_1$  und  $u_2$  variiert.

$$u(\xi) = (1 - \xi)u_1^e + \xi u_2^e \quad (2.3)$$

wobei  $0 \leq \xi \leq 1$  gilt. Dadurch ist die Näherungslösung nun auch an den Grenzen der Elemente stetig. Definiert man die Formfunktionen für das Element  $e$

$$\varphi_1^e(\xi) = 1 - \xi \quad (2.4)$$

$$\varphi_2^e(\xi) = \xi \quad (2.5)$$

so erhält man

$$u(\xi) = \varphi_1^e(\xi)u_1^e + \varphi_2^e(\xi)u_2^e \quad (2.6)$$

Die Funktionen  $\varphi_1^e(\xi)$  und  $\varphi_2^e(\xi)$  heißen Basisfunktionen zu den Knotenparametern  $u_1^e$  und  $u_2^e$ .

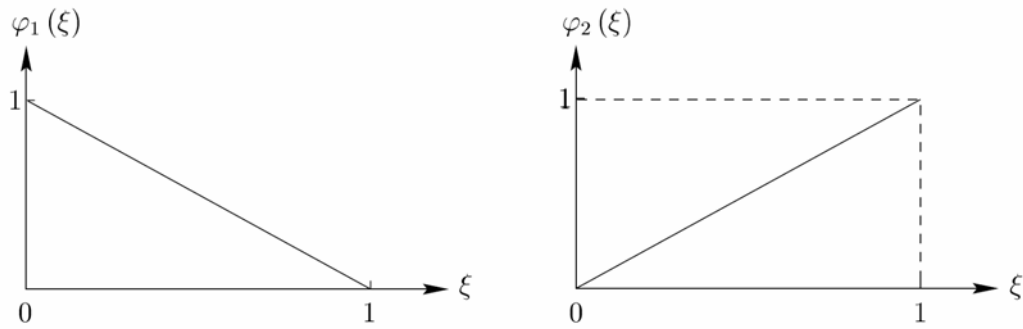


Abbildung 5: Lineare Basisfunktionen in einer Dimension.



Die Werte von  $u$  an den Knotenpunkten des Elementes  $e$  werden lokal nummeriert. Die Verknüpfung zwischen den Knotenwerten  $u_i$  an den globalen Knoten  $i$  und der lokalen Nummerierung wird mit der connectivity matrix  $C$  hergestellt.

$$u_i = u_k^e, \quad i = C(e, k) \quad (2.7)$$

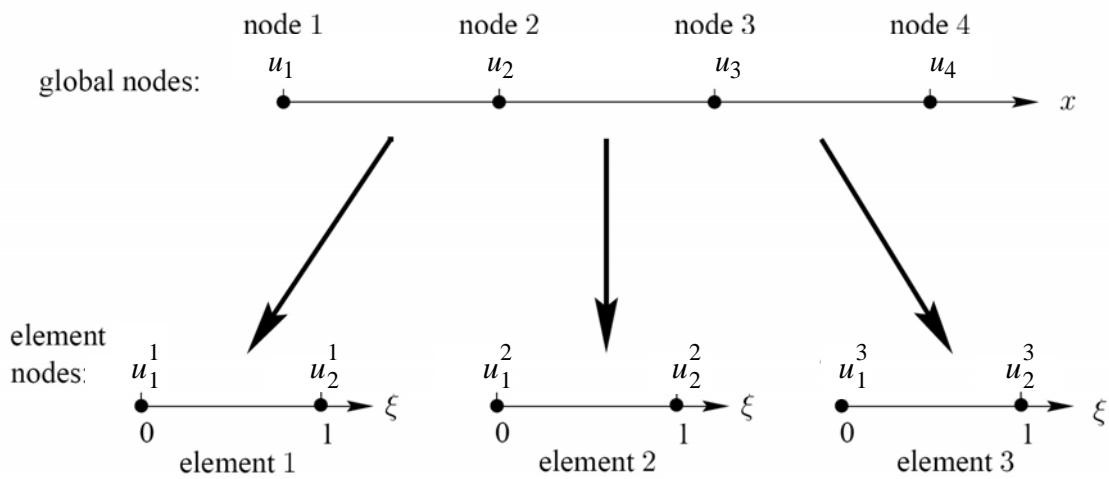


Abbildung 6: Globale und lokale (elementweise) Numerierung der Knoten.

Der Zusammenhang zwischen den lokalen Koordinaten  $\xi$  auf einem Element und den globalen Koordinaten  $x$  folgt aus

$$x(\xi) = \varphi_1^e(\xi)x_1^e + \varphi_2^e(\xi)x_2^e. \quad (2.8)$$

Dabei sind  $x_1^e$  und  $x_2^e$  die  $x$ -Koordinaten der Knoten 1 und 2 des Elementes  $e$ .

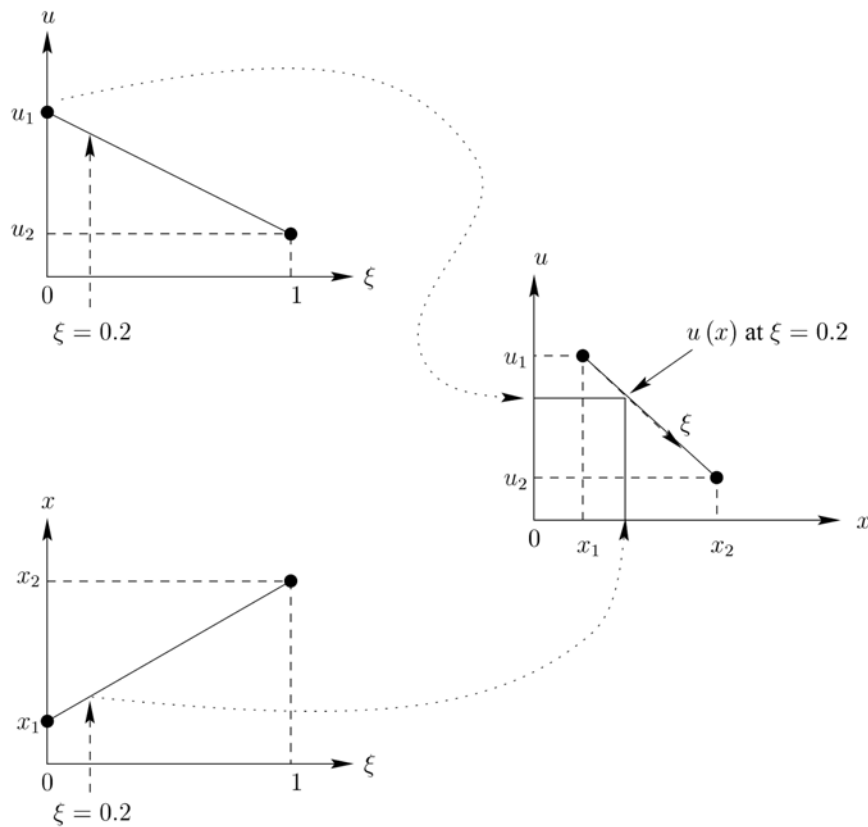


Abbildung 7: Zusammenhang zwischen der Lösung (Koordinaten) im globalen Koordinatensystem und in einem lokalen Koordinatensystem.

Für die Formfunktionen gilt

$$\sum_k \varphi_k^e(x) = 1, \varphi_k^e(x_l) = \delta_{kl} \quad (2.9)$$

Die Formfunktionen auf einem Element kann als Gewichtsfunktion betrachtet werden, die auf einem Punkt  $\xi$  des Elements die Werte von  $u$  an den beiden Endknoten entsprechend gewichtet.

### 3. 2. Quadratische Basisfunktion (1-d)

Die essentielle eigenschaft von Basisfunktionen ist, daß sie an einem Knoten den Wert 1 annehmen und an allen anderen den Wert Null. Das gewährleistet die lineare Unabhängigkeit der Basisfunktionen. Dies bleibt auch erhalten bei Basisfunktionen höherer Ordnung. Zum Beispiel benötigt die quadratische Approximation der Funktion  $u$  über ein Element, drei Knotenpunkte  $u_1, u_2$  und  $u_3$ .

$$u(\xi) = \varphi_1^e(\xi)u_1^e + \varphi_2^e(\xi)u_2^e + \varphi_3^e(\xi)u_3^e \quad (2.10)$$

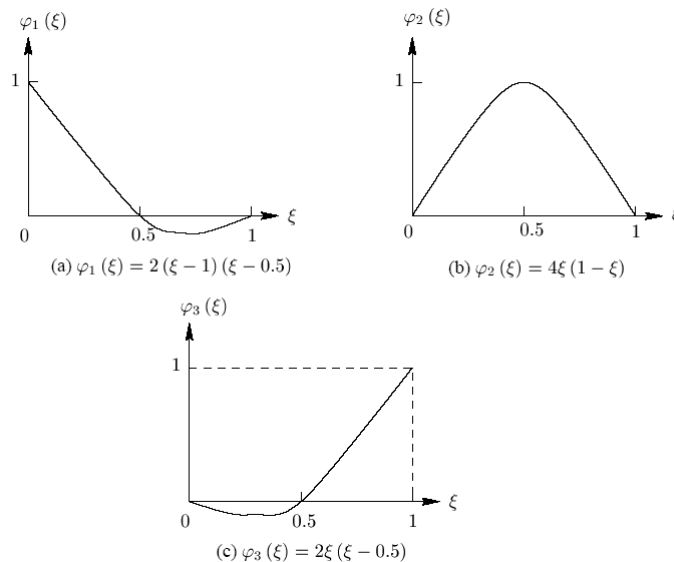


Abbildung 8: Quadratische Basisfunktionen in einer Dimension. Jede Basisfunktion hat den Wert 1 an einem Knoten und Null an allen anderen Knoten.

### 3. 3. Form- und Basisfunktionen (1-d) (globale Sichtweise)

Wechselt man vom lokalen in das globale Koordinatensystem kann man für jeden Knoten Gewichtsfunktionen aus den Formfunktionen der angrenzenden Elemente konstruieren.

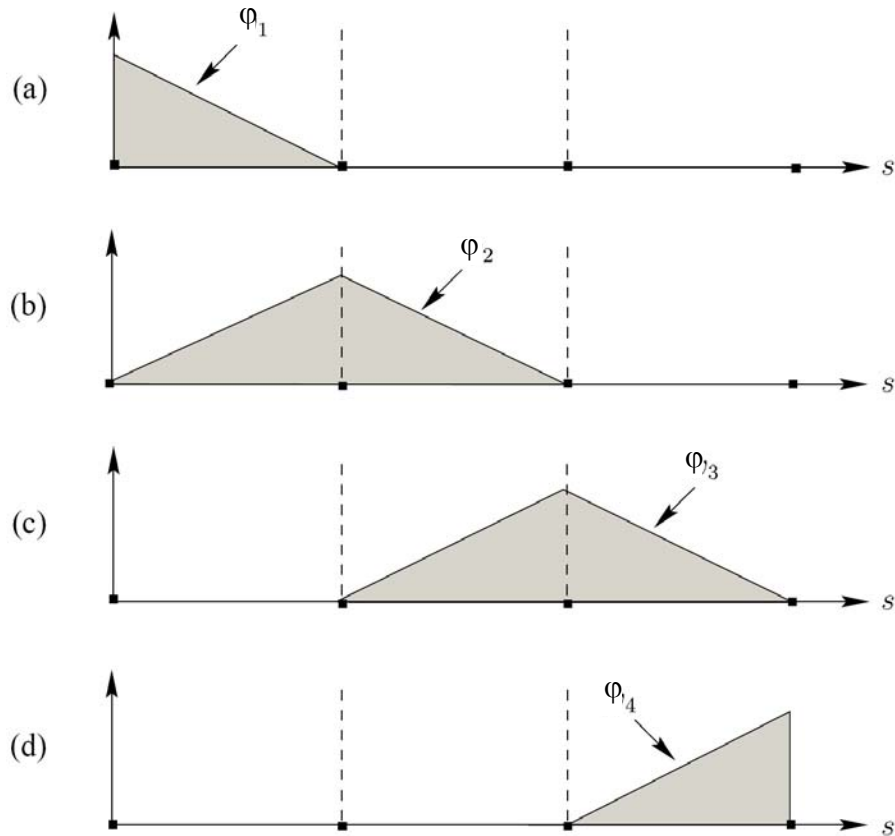


Abbildung 9: Globale lineare Basisfunktionen in einer Dimension.

Die Basisfunktionen eines Knoten  $i$  nehmen auf den Knoten  $i$  den Wert 1 an und sind 0 für alle anderen Knoten.

Die Funktion  $u(x)$  wird dann als Linearkombination der Basisfunktionen

$$u(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) u_i \quad (2.11)$$

dargestellt. Die Summe läuft über alle Knoten  $i$ . Auf dem Knoten  $i$  nimmt  $u$  den Wert  $u_i$  an.

#### Finite Element Basisfunktionen

Die Basisfunktion  $\varphi_i$  ist 1 am Knoten  $i$

Die Basisfunktion  $\varphi_i$  ist null an allen anderen Knoten

Die Basisfunktion ist ein Polynom auf jedem Element

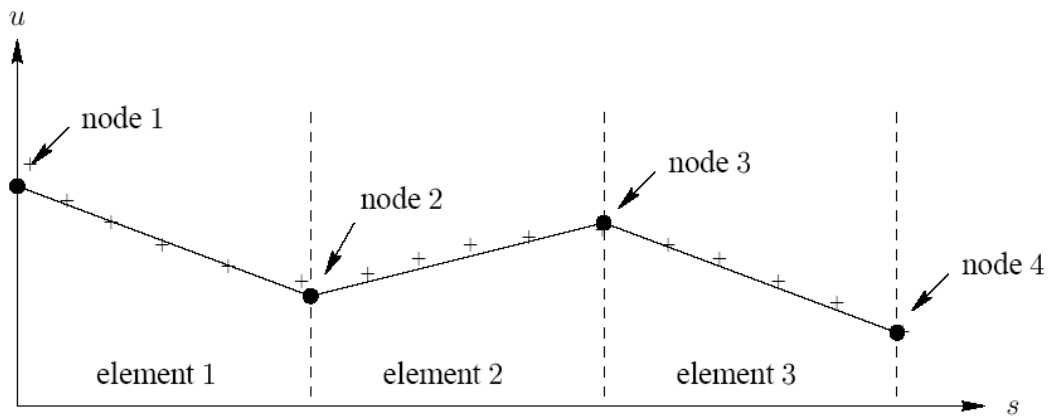
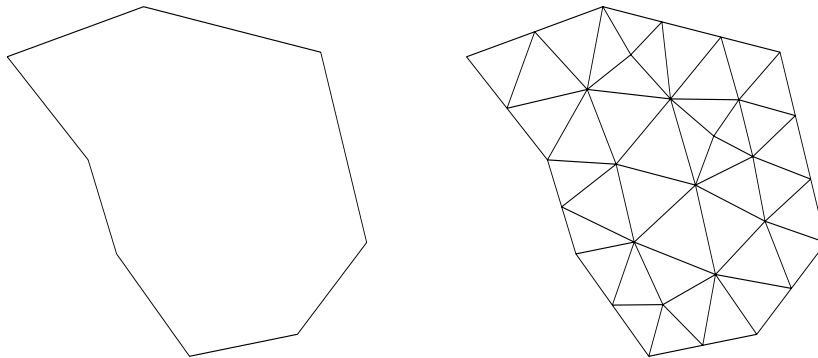


Abbildung 10: Fit der Temperaturmeßpunkte mit den Knotenparametern und den linearen Basisfunktionen. Die gefitteten Werte sind an den Elementengrenzen stetig.

### 3. 4. Dreieckselemente (2-d)



Auf einem Element wird  $u(x,y)$  mit

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^3 \varphi_k^e(x, y) u_k^e \quad (2.12)$$

approximiert. Lineare Formfunktionen folgen aus dem Ansatz

$$\varphi_k^e(x, y) = a_k + b_k x + c_k y, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.13)$$

Die Koeffizienten  $a_i, b_i, c_i$  können aus den Gleichungen

$$\varphi_k^e(x_l, y_l) = \delta_{kl} \quad (2.14)$$

erhalten werden.

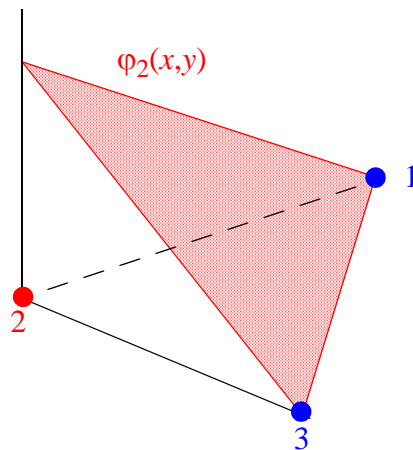


Abbildung 11: Lineare Basisfunktionen in 2-Dimensionen

Es gilt auch wieder

$$x = \sum_{k=1}^3 \varphi_k^e(x, y) x_k, \quad y = \sum_{k=1}^3 \varphi_k^e(x, y) y_k, \quad (2.15)$$

wobei  $(x_i, y_i)$  die Koordinaten des Eckpunktes  $i$  sind. Die Formfunktionen  $\varphi_i^e(x, y)$  kann man als Schwerpunktskoordinaten interpretieren.

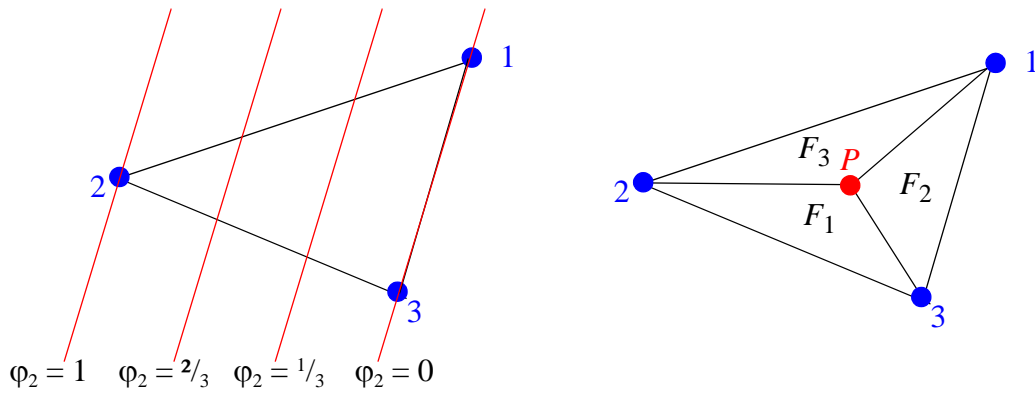


Abbildung 12: Schwerpunktskoordinaten von Dreieckselementen

Die Lösung der Gleichungen (2.14) entspricht den Schwerpunktskoordinaten für den Punkt  $P = (x, y)$

$$\varphi_1^e(x, y) = \frac{F_1}{F_\Delta}, \quad \varphi_2^e(x, y) = \frac{F_2}{F_\Delta}, \quad \varphi_3^e(x, y) = \frac{F_3}{F_\Delta}, \quad (2.16)$$

wobei die Flächen wie folgt berechnet werden können,

$$F_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = a_1 + b_1 x + c_1 y, \quad (2.17)$$

mit  $a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$ ,  $b_1 = y_2 - y_3$  und  $c_1 = x_3 - x_2$ .

### 3. 5. Dreieckselemente höherer Ordnung – gekrümmte Ränder

**Quadratische Ansatzfunktionen.** Für die Interpolation der Näherungslösung mit stückweise quadratischen Funktionen sind auf einem Dreieck 6 Knoten erforderlich.

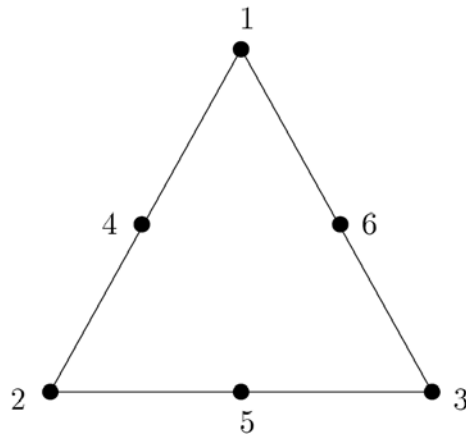


Abbildung 13: Quadratische Interpolation erfordert die Einführung zusätzlicher Knoten auf jedem finiten Element.

Bezeichnet man die Schwerpunktskoordinaten des Elements  $e$  mit  $L_1, L_2$  und  $L_3$ , so erhält man für die quadratischen Formfunktionen

$$\varphi_1^e = L_1(2L_1 - 1), \quad (2.18)$$

$$\varphi_2^e = L_2(2L_2 - 1), \quad (2.19)$$

$$\varphi_3^e = L_3(2L_3 - 1), \quad (2.20)$$

$$\varphi_4^e = 4L_1L_2, \quad (2.21)$$

$$\varphi_5^e = 4L_2L_3, \quad (2.22)$$

$$\varphi_6^e = 4L_3L_1. \quad (2.23)$$

**Dreieckselemente mit einem gekrümmten Rand.** Die Koordinaten eines Punktes  $(x, y)$  können als Linearkombination der Formfunktionen dargestellt werden



$$x = \sum_{k=1}^6 \varphi_k^e(L_1, L_2, L_3)x_k, y = \sum_{k=1}^6 \varphi_k^e(L_1, L_2, L_3)y_k. \quad (2.24)$$

Dabei sind  $(x_k, y_k)$  die Koordinaten der Knotenpunkte.

**ISOPARAMETERISCHES ELEMENTE.** Zur Interpolation der Lösung und der globalen Koordinaten werden die selben Formfunktionen verwendet.

Die Abbildung (2.24) ist quadratisch. Somit können Elemente dargestellt werden, deren Ränder mit einem Polynom 2. Grades beschrieben werden können.

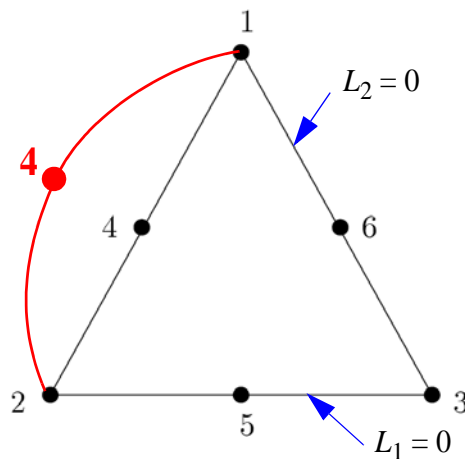


Abbildung 14: Gekrümmte Ränder können durch einen quadratischen Ansatz für die Raumkoordinaten approximiert werden.

Das heißt, läuft  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  jeweils von 0 bis 1 werden durch Gleichung (2.24) alle Punkte innerhalb des obigen Dreieckes mit quadratischen Ränder erreicht.

## 4. Die Ritz-Variante der Methode der finiten Elemente

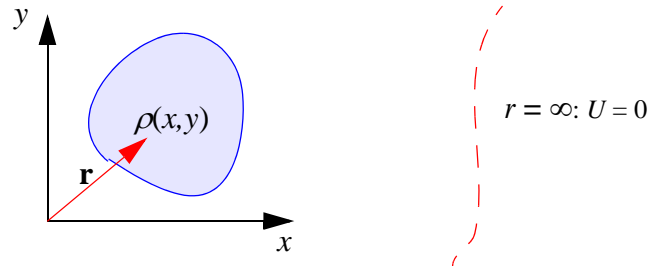
Hier geht man von einem Extremalprinzip aus. Um das elektrische Feld einer Ladungsverteilung  $\rho(x,y)$  auszurechnen, kann man das zugehörige Potential  $U$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla U$ , aus einem Maximalprinzip mit der Methode der finiten Elemente berechnen. Die Selbstenergie einer Ladungsverteilung ist

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla U)^2 dV. \quad (2.25)$$

Wobei für das Potential die Poissongleichung

$$\Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.26)$$

gilt.



Für eine beliebige  $u$  gilt nun folgende Ungleichung

$$W \geq -I = W - \frac{\epsilon_0}{2} \int [\nabla U - \nabla u]^2 dV, \quad (2.27)$$

da das Integral auf der rechten Seite nicht negativ werden kann. Mit (2.25) erhält man

$$-I = -\frac{\epsilon_0}{2} \int [-2\nabla U \nabla u + (\nabla u)^2] dV. \quad (2.28)$$

Durch partielle Integration des ersten Terms im Klammerausdruck ergibt sich mit  $u = 0$  für  $r = \infty$

$$-I = -\frac{\epsilon_0}{2} \int [2u\Delta U + (\nabla u)^2] dV. \quad (2.29)$$

Nun setzt man (2.26) ein und erhält

$$-I = \int \left[ u\rho - \frac{\epsilon_0}{2} (\nabla u)^2 \right] dV. \quad (2.30)$$

Schließlich erhält man

$$I[u] = \int \left[ \frac{\epsilon_0}{2} (\nabla u)^2 - u\rho \right] dV \geq W. \quad (2.31)$$

Wird nun das Funktional  $I$  bezüglich  $u$  minimiert, so wird  $I$  zur elektrostatischen Selbstenergie und  $u$  das zur Ladungsverteilung  $\rho(x,y)$  gehörige Potential  $U$ . Das Integral erstreckt sich dabei über den gesamten Raum.

## 4. 1. Beispiel 1: Lösung einer Poissongleichung (globale Koordinaten)

Durch die Diskretisierung mit der Methode der finiten Elemente wird aus

$$I[u] = \int \left[ \frac{\epsilon_0}{2} (\nabla u)^2 - u \rho \right] dV \geq W. \quad (2.32)$$

dem Variationsproblem eine algebraische Minimierungsaufgabe. Nun kann man  $u$  nach den Basisfunktionen entwickeln

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^N u_i \varphi_i(x, y), \quad (2.33)$$

und erhält dann für die Ableitungen von  $u$

$$u_x(x, y) = \sum_{i=0}^N u_i \varphi_{i,x}(x, y) \quad (2.34)$$

$$u_y(x, y) = \sum_{i=0}^N u_i \varphi_{i,y}(x, y). \quad (2.35)$$

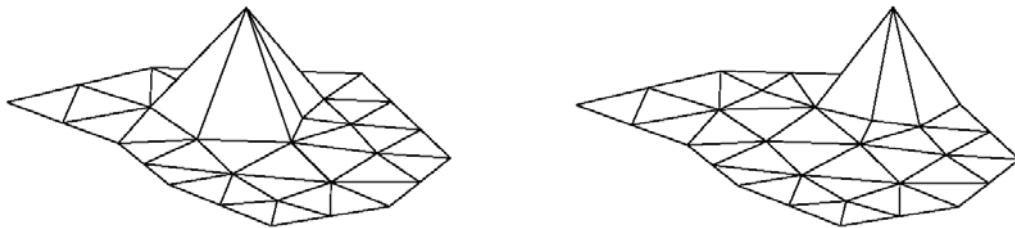


Abbildung 15: Basisfunktionen auf einem Dreiecksgitter.

Setzt man die Gleichungen (2.33) bis (2.35) in das Funktional (2.31) ein und bildet die Ableitungen  $\partial I / \partial u_j$  nach den unbekanntenen Knotenwerten  $u_j$  erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=0}^N u_i \int (\nabla \varphi_i)(\nabla \varphi_j) dV = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} \varphi_j dV, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.36)$$

In der Praxis wird die Entwicklung von  $u$  nach den Basisfunktion nicht explizit ausgeführt. Stattdessen werden zuerst alle Größen elementweise berechnet. Die Elementmatrizen und Elementvektoren werden mit der Connectivity matrix zu einem Gleichungssystem “aufsummiert”.

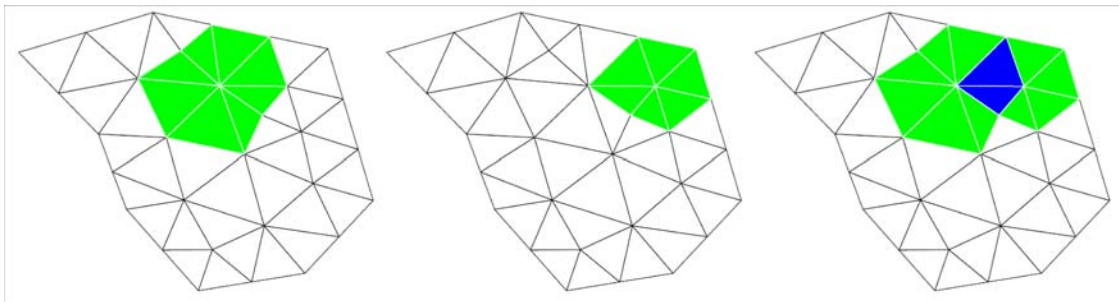


Abbildung 16: Gemeinsamer support der zweier Basisfunktionen. Für die meisten Paare von Basisfunktionen verschwindet der gemeinsame support. Daher ist die Koeffizientenmatrix nur dünn besetzt.

Vereinfachen wir, das vorige Beispiel zu einem eindimensionalen Modell, erhalten wir,

$$\sum_{i=0}^N u_i \int (\varphi'_i)(\varphi'_j) dx = \int f \varphi_j dx, \quad (2.37)$$

mit  $f = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Die Randwert  $u_0$  und  $u_N$  sind bekannt,

(in diesem speziellen Fall gleich Null). Da die Werte konstant sind, liefert die Ableitung nach diesen Größen von Gleichung 2.31 Null. Daraus folgt, daß nur für  $j$  von 1 bis  $N-1$  nichttriviale Gleichungen entstehen. Der erste Term vereinfacht sich ebenfalls und man erhält

$$\sum_{i=1}^{N-1} u_i \int (\varphi'_i)(\varphi'_j) dx = \int f \varphi_j dx, \quad (2.38)$$

(Anmerkung: Für nicht verschwindende Dirichletsche Randbedingungen kann der Konstante Term,  $u_0 \int (\varphi'_i)(\varphi'_j) dx$ , auf die rechte Seite gebracht

werden und man erhält  $\int f \varphi_0 dx - u_0 \int (\varphi'_i)(\varphi'_j) dx$ , wobei  $u_0$  der Randwert ist.

Wir diskretisieren nun das Intervall in  $n$ -Teilintervalle mit gleichmäßiger Unterteilung, d.h. für die Koordinate des  $i$ -ten Knoten gilt

$$x_i = x_0 + ih$$

mit dem Diskretisierungsparameter

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Die Basisfunktionen nehmen die Form an:

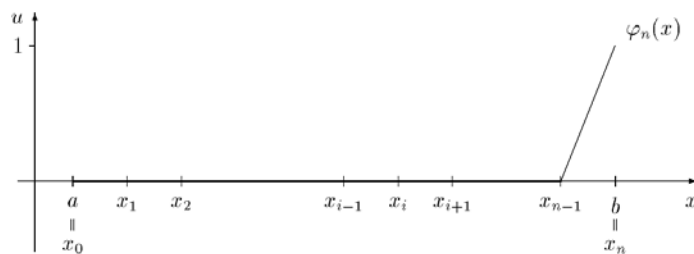
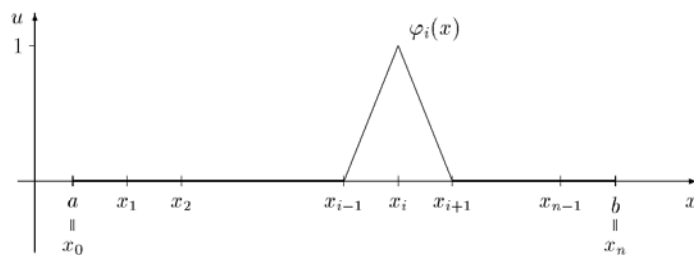
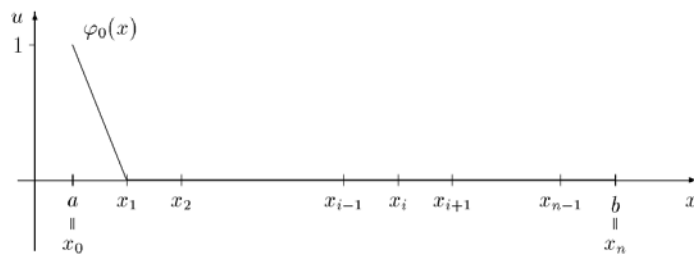


Abbildung 17: Lineare Basisfunktionen für 1 dimensionale Poissongleichung

Für die Funktionen  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , gilt

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{h} & x_{i-1} < x \leq x_i \\ -\frac{x - x_{i+1}}{h} & x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & x_{i+1} < x \leq b \end{cases}$$

und für die Funktion  $\varphi_0(x)$  bzw.  $\varphi_n(x)$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\frac{x - x_1}{h} & a < x \leq x_1 \\ 0 & x_1 < x \leq b \end{cases}, \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x \leq x_{n-1} \\ \frac{x - x_{n-1}}{h} & x_{n-1} < x \leq b \end{cases}$$

(Anmerkung: Für dieses spezielle Beispiel, bei dem an beiden Rändern Dirichletsche Randbedingungen angenommen werden, benötigen wir die Basisfunktionen  $\varphi_0$  und  $\varphi_n$  nicht. Diese werden nur benötigt, wenn freie Randbedingungen, z.B. Neumann Randbedingungen angenommen werden)

Das Gleichungssystem 2.27 kann nun in der Form,

$$\sum_{i=0}^N u_i K_{ij} = f_j, \quad (2.39)$$

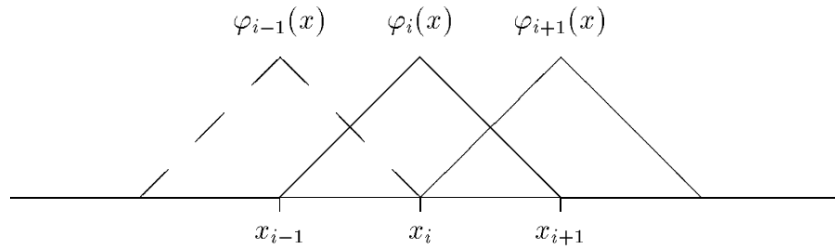
geschrieben werden, wobei  $K_{ij}$  die **Steifigkeitsmatrix** und  $f_j$  der **Lastvektor** ist.

$$K_{ij} = \int (\varphi'_i)(\varphi'_j) dx,$$

$$f_j = \int f \varphi_j dx.$$

Die Matrix  $K$  ist schwach besetzt, dh. viele Elemente sind Null, denn auf Grund der Definition der Basisfunktionen gilt:

$$K_{ij} = \int_a^b \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } j \notin \{i-1, i, i+1\} \\ \neq 0 & \text{für } j \in \{i-1, i, i+1\} \end{cases}$$



Für die einzelnen Elemente der Steifigkeitsmatrix gilt, für  $i=2$  bis  $N-1$

$$K_{i,i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i-1}'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(-\frac{1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) dx = -\frac{1}{h^2} h = -\frac{1}{h},$$

und für  $i=1$  bis  $N-2$

$$K_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) dx = -\frac{1}{h^2} h = -\frac{1}{h}$$

und für  $i=1$  bis  $N-1$

$$\begin{aligned} K_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'(x) \varphi_i'(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x) \varphi_i'(x) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h} \frac{1}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) dx = \frac{1}{h^2} h + \frac{1}{h^2} h = \frac{2}{h} \end{aligned}$$

somit folgt für das gesamte Gleichungssystem:

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 + \frac{1}{h} g_a \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{n-2} \\ \tilde{f}_{n-1} + \frac{1}{h} g_a \end{pmatrix}$$

, wobei  $g_a$  den allgemeinen Fall von Dirichletschen Randwerten mit Werten  $g_a$  an den Knoten 0 und  $N$  berücksichtigen. (0 in diesem Beispiel)

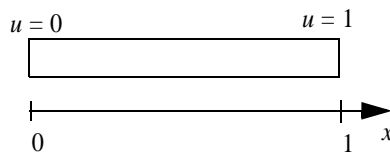
## 4. 2. Beispiel 2: Gleichgewichtsverteilung der Temperatur (lokale Koordinaten)

Im letzten Beispiel wurde gezeigt, wie eine eindimensionale Poissongleichung mit der FEM gelöst werden kann, wenn globale Basisfunktionen verwendet werden. In der finite Element Praxis, erweist es sich als zweckmäßig lokale Koordinaten einzuführen (siehe Kapitell 3. 1). Dadurch werden Integrale über die finiten Elemente stets über Standardelemente ausgeführt. Um den Umgang mit lokalen Koordinatensystemen zu lernen, wird in diesem Beispiel die Gleichgewichtsverteilung der Temperatur mit lokalen Basisfunktionen demonstriert.

Gelöst wird die Gleichung

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0$$

$$u(x=0) = 0, u(x=1) = 1$$



wobei die exakte Lösung

$$u(x) = \frac{e}{e^2 - 1} (e^x - e^{-x}) \quad (1.40)$$

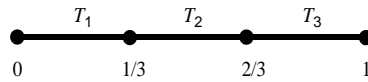
ist.

- Schritt 1: Differentialgleichung → Minimierungsproblem zum Beispiel durch Nachschlagen in einer Tabelle

$$I[u] = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + u^2 \right) dx$$

- Schritt 2: Zerlegung in finite Elemente





$$I[u] = \underbrace{\int_0^{1/3} \left( \frac{du}{dx} \frac{du}{dx} + u^2 \right) dx}_{J_1} + \underbrace{\int_{1/3}^{2/3} \left( \frac{du}{dx} \frac{du}{dx} + u^2 \right) dx}_{J_2} + \underbrace{\int_{2/3}^1 \left( \frac{du}{dx} \frac{du}{dx} + u^2 \right) dx}_{J_3}$$

- Schritt 3: elementweise Entwicklung nach Formfunktionen lokale Koordinaten

$$0 \leq \xi \leq 1$$

- Ansatz für die Näherungslösung auf dem Element  $e$

$$u(\xi) = \underbrace{(1 - \xi)}_{\text{Formfunktion}} u_1^e + \underbrace{\xi}_{\text{Formfunktion}} u_2^e$$

- Einsetzen in die Teilintegrale  $J_e$   
beachte Koordinatentransformation

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_0^1 \left| \frac{dx}{d\xi} \right| d\xi$$

$$J_e = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \left( \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right)^2 + u^2 \right) \left| \frac{dx}{d\xi} \right| d\xi$$

aus  $x(\xi) = (1 - \xi)x_1 + \xi x_2$  folgt  $\frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{d\xi}{dx} = 3$

einsetzen des Ansatzes für  $u$  ergibt

$$J_e = \frac{1}{2} \int_0^1 [9(u_1 \varphi_{1,\xi} + u_2 \varphi_{2,\xi})^2 + (u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2)^2] \frac{1}{3} d\xi$$

### 3 Schritt 4: Ableiten nach den Entwicklungskoeffizienten

$$\frac{\partial J_e}{\partial u_1} = \int_0^1 [9(u_1 \varphi_{1,\xi} + u_2 \varphi_{2,\xi}) \varphi_{1,\xi} + (u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2) \varphi_1] \frac{1}{3} d\xi$$

$$\frac{\partial J_e}{\partial u_2} = \int_0^1 [9(u_1 \varphi_{1,\xi} + u_2 \varphi_{2,\xi}) \varphi_{2,\xi} + (u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2) \varphi_2] \frac{1}{3} d\xi$$

in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J_e}{\partial u_1} \\ \frac{\partial J_e}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \int_0^1 (9\varphi_{1,\xi}\varphi_{1,\xi} + \varphi_1\varphi_1) \frac{1}{3} d\xi & \int_0^1 (9\varphi_{2,\xi}\varphi_{1,\xi} + \varphi_2\varphi_1) \frac{1}{3} d\xi \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ \int_0^1 (9\varphi_{1,\xi}\varphi_{2,\xi} + \varphi_1\varphi_2) \frac{1}{3} d\xi & \int_0^1 (9\varphi_{1,\xi}\varphi_{1,\xi} + \varphi_1\varphi_1) \frac{1}{3} d\xi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Elementmatrix } \mathbf{E}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Elementmatrix  $\mathbf{E}$

- Formfunktionen und deren Ableitungen

$$\varphi_1 = 1 - \xi, \quad \varphi_{1,\xi} = -1$$

$$\varphi_2 = \xi, \quad \varphi_{2,\xi} = 1$$

- Integration ergibt die Einträge in die Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(9 + \frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3}\left(-9 + \frac{1}{6}\right) \\ \frac{1}{3}\left(-9 + \frac{1}{6}\right) & \frac{1}{3}\left(9 + \frac{1}{3}\right) \end{bmatrix}$$

#### 4 Schritt 5: Bilde das Gleichungssystem

die Einträge in die globale Koeffizientenmatrix ergeben sich aus den Basisfunktionen. Im folgenden bezeichnen wir mit  $u_i$  die lokale Koordinate  $i$  (1 bis 2 in diesem 1. dimensionalen Beispiel) auf dem Element  $e$  und mit  $U_j$  den globalen Koeffizienten auf dem Knoten  $j$ . Wir sind interessiert an der Ableitung der Funktion  $J$  nach den globalen Koordinaten. Sind diese Ableitungen Null, wissen wir unsere Lösung ist ein Extrempunkt. So erhalten wir beispielsweise für den zweiten Knoten.

$$\frac{\partial J}{\partial U_2} = \frac{\partial J_1}{\partial u_2} + \frac{\partial J_2}{\partial u_1}, \quad (1.41)$$

da eine Änderung des Koeffizienten  $U_2$  sowohl Einfluß auf die Lösung auf dem erste Element hat als auch auf dem zweiten Element hat. Somit werden die Beiträge an den gemeinsamen Knoten aufsummiert

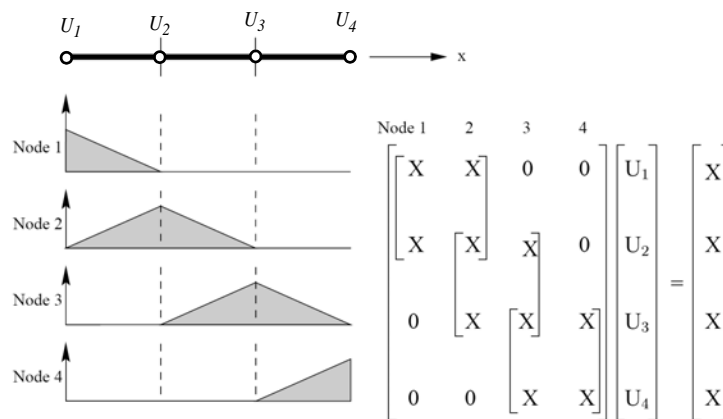


Abbildung 18: Assemblierung von den lokalen Elementmatrizen zu der globalen Steifigkeitsmatrix.

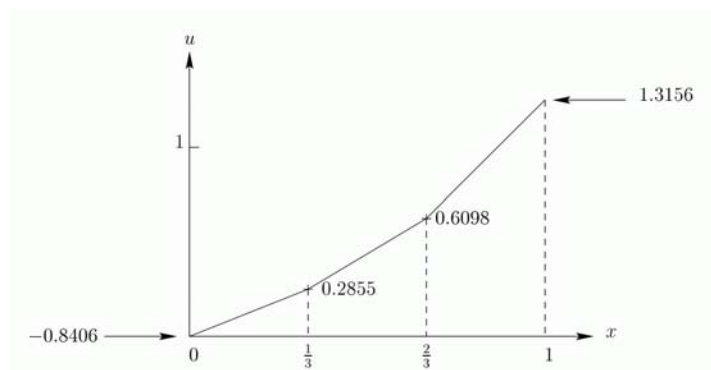
das globale Gleichungssystem ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

Um die Randbedingungen zu berücksichtigen, kann einfach die erste und die vierte Gleichung ersetzt werden, durch die jeweilige Gleichung für die Randbedingung.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich die FEM Näherungslösung:



Die analytischen Lösung an den Punkte 1/3 und 2/3 ist 0.2889 und 0.6102

### 4. 3. Zusammenfassung der Ritz-Variante der FEM

- 5 Sofern eine Differentialgleichung vorliegt wird sie in eine

Variationsaufgabe  $I = \int_G F dV = \min$  überführt.

- 6  $G$  wird in finite Elemente  $T_1, T_2, \dots, T_N$  zerlegt und  $I$  durch die Summe

$$I = \int_{T_1} F dV + \int_{T_2} F dV + \dots + \int_{T_N} F dV = J_1 + J_2 + \dots + J_N \text{ ersetzt.}$$

- 7 Auf den Elementen werden die Knotenpunkte und die Formfunktionen festgelegt. Anschließend werden in  $F$  elementweise folgende Ersetzungen durchgeführt.

$$u = \sum_k \varphi_k^e u_k^e, \quad u_x = \sum_k \varphi_{k,x}^e u_k^e, \quad u_y = \sum_k \varphi_{k,y}^e u_k^e$$

- 8 Notwendig für ein Minimum von  $I$  ist das Verschwinden der Ableitungen  $\partial I / \partial u_j = 0$  von  $I$  nach den unbekannt Knotenwerten  $u_j$ . In der Praxis bildet man elementweise  $\partial J_e / \partial u_j = 0$  für jeden Knoten  $j$ , der zum Element  $T_e$  gehört.

- 9 Aus den im Schritt 4 entstandenen Elementmatrizen und Elementvektoren wird die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite eines linearen Gleichungssystems zusammengesetzt.

## 5. Schwache Formulierung

Nicht jede Differentialgleichung läßt sich in ein äquivalentes Funktional überführen. Um eine allgemeine partielle Differentialgleichung mit der Methode der finiten Elemente zu lösen wird sie zuerst in die schwache Formulierung überführt.

Um die schwache Formulierung zu erhalten geht man wie folgt vor

- 1 Multipliziere die Differentialgleichung mit einer Testfunktion und integriere das Ergebnis über das Grundgebiet

$$\int_{\Omega} [\text{PDE} \cdot \text{Testfunktion}] dV = 0.$$

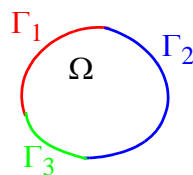
- 2 Übertrage mit partieller Integration die zweite Ableitung auf die Testfunktion.
- 3 Füge die Randbedingungen ein.

Das Ergebnis ist eine Bedingung, die für alle genügend glatten Testfunktion erfüllt sein muß.

Für das Modellsystem

$$\sum_{i,j} -\frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.43)$$

mit den Randbedingungen



$$u = g_1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \nabla u = g_2, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2$$

$$\sigma u + \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \nabla u = g_3, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3, \sigma > 0$$

soll nun die entsprechende schwache Formulierung abgeleitet werden. Die Testfunktion  $v$  soll am Rand  $\Gamma_1$  (der Teil des Randes an dem Dirichlet Bedingungen festgelegt sind) verschwinden. Schritt 1 ergibt

$$\int_{\Omega} v [-\nabla(\mathbf{A} \nabla u) + cu - f] dV = 0. \quad (2.44)$$

Nach der partiellen Integration des ersten Terms erhält man

$$\int_{\Omega} [\nabla v \cdot \mathbf{A} \nabla u + vcu - vf] d\Omega - \int_{\partial\Omega} v(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \nabla u) dS = 0. \quad (2.45)$$

Das Randintegral in (2.45) ist null am Rand  $\Gamma_1$ , da dort die Testfunktion  $v$  verschwindet. Am Rand  $\Gamma_2$  und  $\Gamma_3$  setzt man nun für  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \nabla u$  die Randbedingungen (2.55) und (2.56) und erhält

$$\int_{\Omega} [\nabla v \cdot \mathbf{A} \nabla u + vcu - vf] d\Omega - \int_{\Gamma_2} v g_2 d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_3} v(g_3 - \sigma u) d\Gamma_3 = 0. \quad (2.46)$$

Gleichung (2.46) ist für jedes  $v$  aus der Menge der glatten Funktionen, die am Rand  $\Gamma_1$  gleich null sind, erfüllt.

**SCHWACHE FORMULIERUNG.** *Suche eine Funktion  $u$ , sodaß  $u$  Gleichung (2.46) für alle  $v$  aus der Menge der glatten Funktionen, die am Rand  $\Gamma_1$  gleich null sind, und  $u = g_1$  auf  $\Gamma_1$  erfüllt.*

Eine Lösung der starken Formulierung (2.43) ist auch eine Lösung der schwachen Formulierung. Die schwache Formulierung stellt geringere Anforderungen an die Glattheit der Lösung und der Koeffizienten  $a_{ij}$  und  $c$ .

## Randbedingungen

**Dirichlet'sche Randbedingungen** legen den Wert von  $u$  und den Randknoten  $u_d \in \Gamma_1$  fest. Dadurch werden Knoten eines finiten Element Gitters in aktive Knoten und Dirichlet Knoten unterteilt.

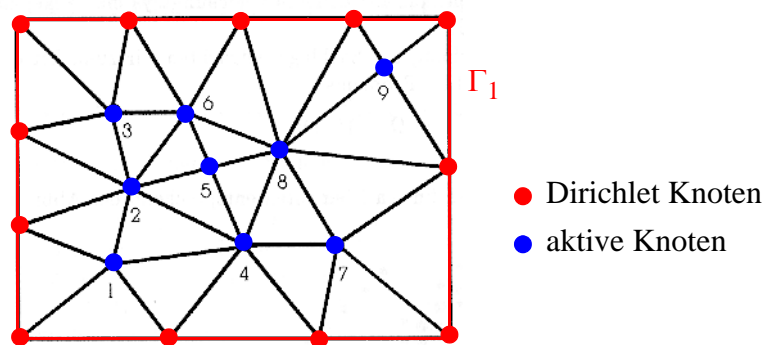


Abbildung 19: Die Werte  $u_j$  an den Dirichlet Knoten sind bekannt.

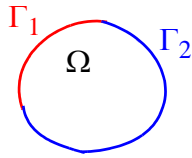
Natürliche oder Neumann'sche Randbedingungen sind Bestandteil der Formulierung und treten als Randintegrale auf.

## Galerkin-Methode

Wird in (2.46)  $u$  als Linearkombination der Basisfunktionen entwickelt,

$$u = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i, \quad (2.47)$$

und werden für die Funktionen  $v$  die Basisfunktion  $\varphi_j$  an den aktiven Knoten  $j$  gewählt, so erhält man ein lineares Gleichungssystem für die unbekanten Knotenwerte



$$\sum_{i=1}^{N_a} u_i \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\Omega = \int_{\Omega} \varphi_j f dV + \int_{\Gamma_2} \varphi_j g_2 d\Gamma_2 \quad (2.48)$$

$$- \sum_{i=N_a+1}^N u_i \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\Omega$$

Zur Vereinfachung wurde  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ ,  $c = 0$ , und  $\Gamma_3 = 0$  gewählt. Die Zahl der aktiven Knoten ist  $N_a$ , die Gesamtzahl der Knoten ist  $N$ . Die Koeffizientenmatrix des durch des Ritz'schen Verfahren oder Galerkin Verfahrens entstanden linearen Gleichungssystems heißt Steifigkeitsmatrix und hat spezielle Eigenschaften.

### Eigenschaften der Steifigkeitsmatrix

Die Matrix ist schwach besetzt und hat bei guter Anordnung der Unbekannten eine Bandstruktur.

Die Matrix ist symmetrisch und positiv definit, falls  $\mathbf{A}$  in (2.43) symmetrisch und positiv definit und wenn  $c > 0$  oder  $\Gamma_1 \cup \Gamma_3 = \emptyset$  ist.

Diese Eigenschaften ermöglichen effiziente Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems.

Vergleichen wir Gleichung (2.48) und Gleichung (2.36) sehen wir, daß die Ritz Methode und die Galerkin Methode genau auf das selbe lineare Gleichungssystem führen. Die Lösung der Galerkin Methode minimiert somit auch das zugehörige Funktional der Differentialgleichung und approximiert somit die exakte Lösung bestmöglich im Funktionenraum der stückweisen linearen Funktionen.

Im folgenden soll nun näher erläutert werden, warum die Lösung der Galerkin Methode die exakte Lösung approximiert.



## 5. 1. Methode der gewichteten Residuen.

Gleichung (2.44) kann man als das Integral über das Produkt aus einer dem Residuum der Differentialgleichung mal einer Gewichtsfunktion betrachten

$$\int_{\Omega} [\mathbf{Residuum} \cdot \mathbf{Gewichtsfunktion}] dV = 0. \quad (2.49)$$

Ist  $u$  die exakte Lösung der Differentialgleichung, dann verschwindet das Residuum. Nun sucht man eine Approximation der exakten Lösung, daß heißt das Residuum wird gleichmäßig über das Grundgebiet verteilt sein. Mit der Gleichung (2.49) wird das Residuum beziehungsweise der Fehler im räumlichen Mittel null. Zur Approximation der exakten Lösung wird eine Näherungslösung  $u$  als Linearkombination der Basisfunktionen dargestellt. Als Gewichtsfunktionen kann man nun die Basisfunktionen  $\varphi_j$  der Methode der finiten Elemente verwenden. Dadurch erhält man aus (2.49) für jeden Knoten  $j$  (jede Basisfunktion) eine Gleichung. Durch die spezielle Wahl der Gewichtsfunktionen wird das Residuum beziehungsweise der Fehler orthogonal zum Funktionenraum, in dem  $u$  dargestellt wird. Der Fehler nimmt monoton ab, wenn das finite Elementgitter verfeinert wird. Die Grundidee der sogenannten Galerkin-Methode wird durch die folgende Abbildung verdeutlicht.

In (a) wird ein exakter Vektor  $\mathbf{u}_e$  durch einen Basisvektor  $\varphi_1$  dargestellt  $\mathbf{u} = u_1\varphi_1$ . Bei der Galerkin-Methode wird das Residuum  $\mathbf{R} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}$  minimiert, indem es orthogonal zu  $\varphi_1$  und somit auch zur Näherungslösung  $\mathbf{u}$  gesetzt wird. Fügt man einen weiteren Freiheitsgrad  $\varphi_2$  hinzu, so ergibt sich die Näherungslösung zu  $\mathbf{u} = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2$ . Das Residuum wird nun auch orthogonal zu  $\varphi_2$  und somit zu  $\mathbf{u}$  gemacht. Wird ein weiterer Basisvektor zugelassen, dann wird  $\mathbf{u} = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3$  und  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e$ .

Bei der Methode der finiten Elemente ist die entsprechende Orthogonalitätsbedingung  $\int [R \cdot \varphi_i] dV = 0$ , die für die Residuen und Basisfunktionen  $\varphi_i$ , die zur Darstellung von  $u$  verwendet werden, erfüllt sein muß.

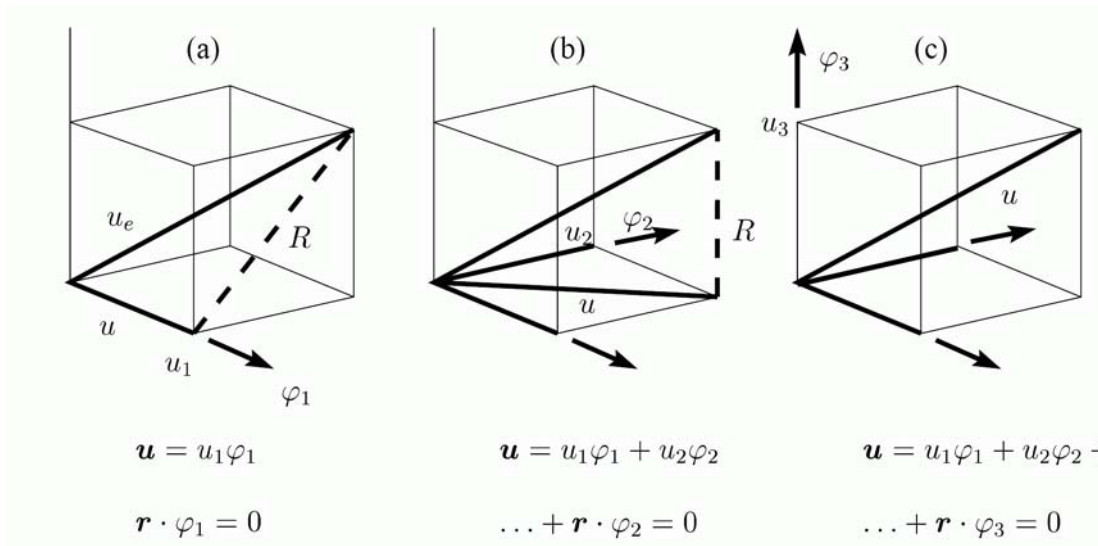


Abbildung 20: Schematische Darstellung der Orthogonalität zwischen dem Residuum  $\mathbf{R}$  und den Basisfunktion  $\varphi_i$  bei der Galerkin-Methode.  $\mathbf{u}_e$  ist die exakte Lösung,  $\mathbf{u}$  deren Approximation. Mit zunehmenden Anzahl von Basisfunktionen bleibt  $\mathbf{R}$  orthogonal zu den  $\varphi_i$  und  $|\mathbf{R}|$  wird kleiner.

## 5. 2. Konvergenz der FEM

Anhand der Poissongleichung soll nun gezeigt werden, daß die Methode der finiten Element den Fehlen  $\|u_e - u_{fe}\|_E$  minimiert.

$$\|u_{\text{ex}} - u_{\text{fe}}\|_E = \min_{u \in S} \|u_{\text{ex}} - u\|_E \quad (2.50)$$

Dabei ist  $u_e$  die exakte Lösung und  $u_{fe}$  deren finite Elementapproximation.  $S$  ist ein Unterraum des von den Basisfunktionen  $\varphi_i$  aufgespannten Raumes, sodaß  $u \in S$  die Dirichlet'schen Randbedingungen erfüllt.  $\|\cdot\|_E$  ist die sogenannte Energienorm

$$\|v\|_E^2 = \int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 d\Omega. \quad (2.51)$$

Für die exakte Lösung der Poissongleichung  $\Delta u = -f$  mit Dirichletbedingungen  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$  gilt

$$\int_{\Omega} [\nabla v \nabla u_{\mathbf{e}} - vf] d\Omega = 0. \quad (2.52)$$

Die Gleichung ist für alle glatten Funktion  $v$  erfüllt, die am Rand  $\partial\Omega$  verschwinden. Gesucht wird nun nach Approximationen  $u_{\mathbf{fe}}$ , sodaß  $u_{\mathbf{fe}} \in S$  und

$$\int_{\Omega} [\nabla v \nabla u_{\mathbf{fe}} - vf] d\Omega = 0 \quad (2.53)$$

erfüllt sind (schwache Formulierung). Subtrahiert man nun Gleichung (2.53) von Gleichung (2.52) ergibt sich

$$\int_{\Omega} [\nabla v \nabla (u_{\mathbf{e}} - u_{\mathbf{fe}})] d\Omega = 0. \quad (2.54)$$

Gleichung (2.54) muß für Funktionen im Raum  $S$  erfüllt sein. Somit auch für  $v = u_{\mathbf{e}} - u_{\mathbf{fe}} - (u_{\mathbf{e}} - u)$ , mit beliebigen  $u \in S$ , da  $v$  ebenfalls ein Element vom Raum  $S$  ist. (Die Funktionen  $u$  die im Allgemeinen kein Element von  $S$  ist fällt aus der obigen Gleichung weg.)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\nabla (u_{\mathbf{e}} - u_{\mathbf{fe}}) \{ \nabla (u_{\mathbf{e}} - u_{\mathbf{fe}}) - \nabla (u_{\mathbf{e}} - u) \}] d\Omega &= 0, & (2.55) \\ \int_{\Omega} \|\nabla (u_{\mathbf{e}} - u_{\mathbf{fe}})\|^2 &= \int_{\Omega} \nabla (u_{\mathbf{e}} - u_{\mathbf{fe}}) \cdot \nabla (u_{\mathbf{e}} - u) d\Omega \end{aligned}$$

Mit  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  folgt daraus

$$\int_{\Omega} \|\nabla (u_{\mathbf{e}} - u_{\mathbf{fe}})\|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla (u_{\mathbf{e}} - u_{\mathbf{fe}})\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla (u_{\mathbf{e}} - u)\|^2 \quad (2.56)$$

und hieraus

$$\int_{\Omega} \|\nabla (u_{\mathbf{e}} - u_{\mathbf{fe}})\|^2 \leq \int_{\Omega} \|\nabla (u_{\mathbf{e}} - u)\|^2, \text{ für beliebiges } u \in S. \quad (2.57)$$

Die Methode der finiten Element findet also jene Funktion aus dem aus den Basisfunktionen aufgespannten Funktionenraum, für die der Fehler in der Energienorm minimal ist.

In der Praxis ist die Energienorm äußerst wichtig, da damit die Konvergenz und die Konvergenzgeschwindigkeit der Methode bei der Verfeinerung des finiten Elementgitter gezeigt werden kann.

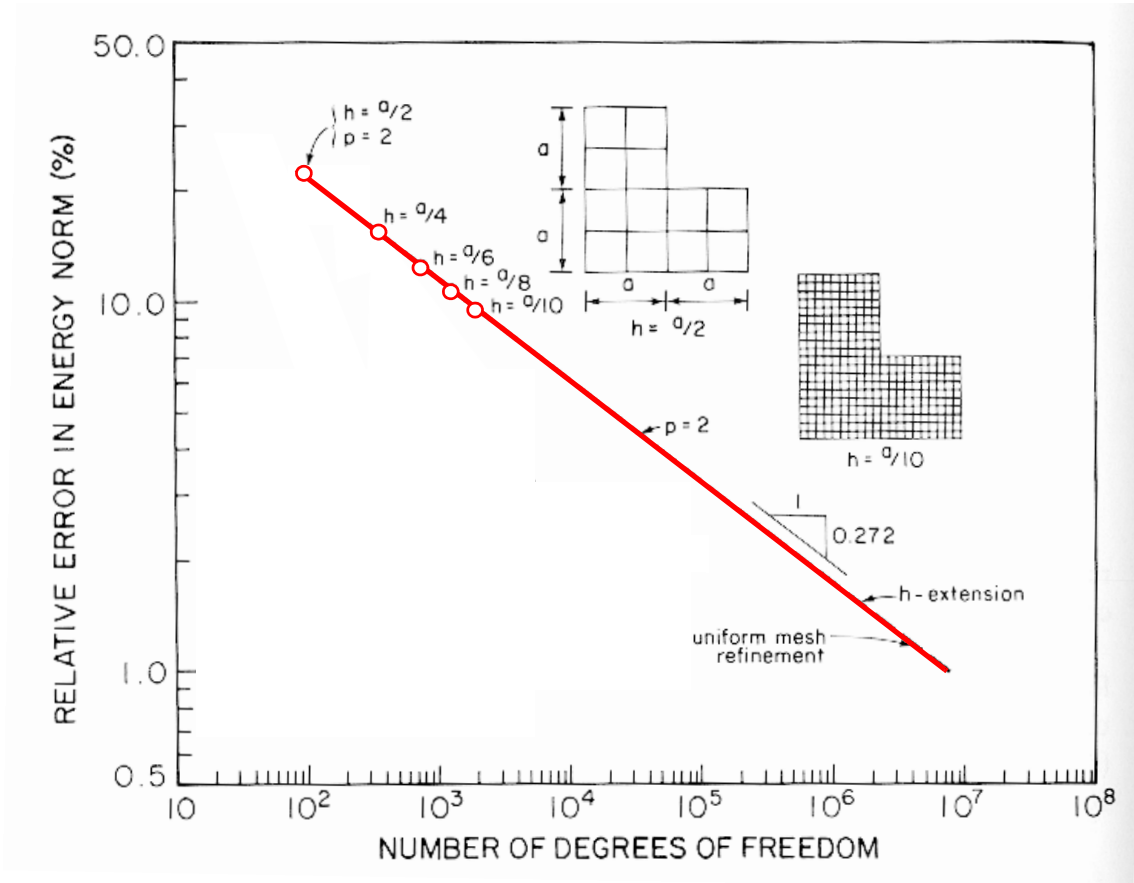


Abbildung 21: Verhältnis zwischen dem Fehler in der Energienorm und der Anzahl der Freiheitsgrade bei gleichmäßiger Gitterverfeinerung